



TITLE:

Resequencing Bufferを持つ待ち行列システムについて(決定理論とその周辺)

AUTHOR(S):

中出, 康一; 大野, 勝久

CITATION:

中出, 康一 ...[et al]. Resequencing Bufferを持つ待ち行列システムについて(決定理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1990, 726: 27-36

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101905>

RIGHT:

Resequencing Buffer を持つ待ち行列システムについて

名古屋工業大学 生産システム工学科

中出 康一 (Koichi Nakade)

大野 勝久 (Katsuhisa Ohno)

1. はじめに

生産システムや通信, コンピュータなどのシステムを解析する有効なモデルとして待ち行列システムがある. 客は製品, パケット, メッセージ, ジョブに, サーバーが処理ステーション, 伝送チャネル, CPUに対応する. これらのシステムにおいて, 客の待ち行列遅延やコストを最小化するように, システムに到着する客をどのサーバーに割り当てるかが問題となる. これらは, 通信などの複数のリンクからなるチャネルにおいて, 到着したメッセージやパケットをリンクに割り当てるときにみられる.

この問題において, これまでの研究では到着時の客の順序は退去時の順序と一致しなくてもよいものと仮定されていた (Weber(1978), Hirota, Ohnishi and Ibaraki(1987) など). しかし, この順序が一致しなければならない場合も考えられる. 例えば, 交換局間に複数の回線 (multi-link) が設置された通信ネットワークにおいては, 送信ノードである手続きにしたがってパケットを各回線に振り分けて, 受信ノードでそのパケットを揃えることになる. この場合, 処理を受けたパケットは, 受信ノードで, 自分より先に到着した客のサービスがすべて終わるまでである Buffer で待たなければならない. この Buffer を Resequencing Buffer とよび, この Buffer で待つ遅延を Resequencing Delay とよぶ.

本報告では Resequencing Buffer をもつ待ち行列システムを考察する. 2節では, これまでになされている結果について簡単に触れる. 3節以降では, 並列待ち行列システムにおける到着客の最適割り当て問題を考察する. まず, 3節でモデルについて述べ, 4節で, 到着客の全遅れ (=待ち遅延 (サービス時間を含む) + Resequencing Delay) を求める. 5

節では、各到着客の全遅れを確率的に最小化する政策を求める。

2. Resequencing Buffer を持つシステム

Barath-Kumar and Kermani(1983) は、同一の速度を持つ s 人のサーバーからなる $M/M/s$ モデルにおける順序待ち特性を論じた。一方、Yum and Ngai(1986) は、異なる virtual circuit から $M/M/s$ システムに到着し、処理後各 virtual circuit ごとに Resequencing Buffer を設けて順序を揃えるモデルの解析を行っている。

Iliadis and Lien(1988) は、異種サーバーからなる $M/M/2$ システムにおける客の割り当て政策を考察した。対象とした政策はしきい値型政策、すなわち、処理速度の大きいサーバーへはいつも客を送り、待ち行列があるしきい値 N を超えたときのみ、遅いサーバーへ客を送る政策である。Iliadis らは、遅いサーバーへは待ち行列の先頭の客を送るしきい値型政策と、先頭から $N+1$ 番目の客を送るしきい値型政策との間で、客の期待全遅れの比較を行い、処理速度の比の大小により、性能の優る政策が異なることがわかった。さらに Varma(1988) は、先頭の客を必ず送る政策の中で、しきい値型政策は無限期間総割り引き期待人数を最小化することを示した。

3. Resequencing Buffer を持つ並列待ち行列システム

パラメータ μ をもつ N 人の同一指数サーバーおよび Resequencing Buffer からなる並列待ち行列システムを考える。 n 番目に到着した客を客 n , $n \in Z = \{0, 1, 2, \dots\}$, とする。 T_n を客 n の到着時刻とすると、到着時刻の列 $\{T_0, T_1, \dots\}$ は一般の確率点過程を形成し、サービス過程とは独立であると仮定する。各到着客はある割り当て政策の下で N 個の待ち行列のうち一つに送られる。客 n がサービスを完了したとき、もし客 $0, 1, 2, \dots, n-1$ がすべてサービスを終えているときにはシステムを退去し、そうでないときにはこれらの客がサービスを終えるまで Resequencing Buffer で待つ。

割り当て政策として、次の政策空間を考える。

Π_n : 客 n の到着直前における客 $0, 1, 2, \dots, n-1$ の位置をみて客 n を割り当てる政策の集合,

Π'_n : 客 n の到着直前における待ち行列長をみて客 n を割り当てる政策の集合,

$$\Pi = \prod_{n=0}^{\infty} \Pi_n,$$

$$\Pi' = \prod_{n=0}^{\infty} \Pi'_n.$$

問題は Π' において各到着客の全遅れを確率的に最小化する政策を求めることである.

以下の記号を用いる.

TD_n : 客 n の全遅れをあらわす確率変数,

$X_i^-(n)$ ($X_i^+(n)$): 客 n の到着直前 (直後) における待ち行列 i の待ち行列長

$$X^+(n) = (X_1^+(n), X_2^+(n), \dots, X_N^+(n)),$$

$$X^-(n) = (X_1^-(n), X_2^-(n), \dots, X_N^-(n)).$$

$$[a]^+ = \max\{0, a\}.$$

4. 客 n の全遅れ

本節では, Π_n において客 n の全遅れを確率的に最小化する政策を求める. Π_n において用いられる情報は, 次のようにあらわされる.

$$l = \{(l_{1,1}, l_{1,2}, \dots, l_{1,n_1}), (l_{2,1}, l_{2,2}, \dots, l_{2,n_2}), \dots, \\ (l_{N,1}, l_{N,2}, \dots, l_{N,n_N}), (l_{N+1,1}, l_{N+1,2}, \dots, l_{N+1,n_{N+1}})\},$$

ここで

n_i : 待ち行列 i の系内客数 ($i = 1, 2, \dots, N$),

$l_{i,j}$: 待ち行列 i の先頭から j 番目の位置にいる客の到着番号 (すなわち, 客 m がいるときには, $l_{i,j} = m$.) ($j = 1, 2, \dots, n_i$),

n_{N+1} : resequencing buffer にいる客数,

$l_{N+1,j}$: Resequencing Buffer の先頭から j 番目の客の到着番号 ($j = 1, 2, \dots, n_{N+1}$).

l が与えられたとき, 客 n が待ち行列 i に割り当てられたとする. 客 n は, $(n_1 + n_2 + \dots + n_N)$

人の客および自分自身がサービスを終えたときシステムを退去することから、客 n の全遅れ TD_n は次の式で与えられる。

$$TD_n = \max\left\{\sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j}, \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_{i+1}} X_{i,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_N} X_{N,j}\right\}$$

ここで、 $X_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n_i; i = 1, 2, \dots, N$) は待ち行列 i の先頭から j 番目の客のサービス時間をあらわす。 $X_{i,j}$ はたがいに独立で同一の指数分布にしたがうことから、

$$\begin{aligned} P(TD_n \leq x | l, \text{客 } n \text{ を待ち行列 } i \text{ に割り当てる}) \\ &= P(\max\{\sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j}, \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_{i+1}} X_{i,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n_N} X_{N,j}\} \leq x | l) \\ &= P(\sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j} \leq x) P(\sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j} \leq x) \\ &\quad \dots P(\sum_{j=1}^{n_{i+1}} X_{i,j} \leq x) \dots P(\sum_{j=1}^{n_N} X_{N,j} \leq x) \end{aligned} \quad (1)$$

TD_n は、待ち行列長を通してのみ状態 l に依存することに注意する。

補題 1 $n_{i_1} \leq n_{i_2}$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, ならば,

$$P(\sum_{j=1}^{n_{i_1}+1} X_{i_1,j} \leq x) P(\sum_{j=1}^{n_{i_2}} X_{i_2,j} \leq x) \geq P(\sum_{j=1}^{n_{i_1}} X_{i_1,j} \leq x) P(\sum_{j=1}^{n_{i_2}+1} X_{i_2,j} \leq x).$$

証明

$$\begin{aligned} &P(\sum_{j=1}^{n_{i_1}+1} X_{i_1,j} \leq x) P(\sum_{j=1}^{n_{i_2}} X_{i_2,j} \leq x) - P(\sum_{j=1}^{n_{i_1}} X_{i_1,j} \leq x) P(\sum_{j=1}^{n_{i_2}+1} X_{i_2,j} \leq x) \\ &= \sum_{j=n_{i_1}+1}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} \cdot \sum_{k=n_{i_2}}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} - \sum_{j=n_{i_1}}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} \cdot \sum_{k=n_{i_2}+1}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \\ &= \frac{(\mu x)^{n_{i_2}}}{n_{i_2}!} e^{-\mu x} \cdot \sum_{j=n_{i_1}+1}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} - \frac{(\mu x)^{n_{i_1}}}{n_{i_1}!} e^{-\mu x} \cdot \sum_{k=n_{i_2}+1}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \\ &= \frac{e^{-2\mu x} (\mu x)^{n_{i_1}+n_{i_2}+1}}{n_{i_1}! n_{i_2}!} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_{i_1}! (\mu x)^k}{(n_{i_1}+1+k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_{i_2}! (\mu x)^k}{(n_{i_2}+1+k)!} \right\} \\ &\geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

この補題は、短い方の待ち行列に送る政策が、確率的に客 n の全遅れを小さくすることを示している。補題 1 と (1) 式から、直ちに次の結果が導かれる。

定理 1 任意の l に対して、客 n を最短の待ち行列へ送る政策は、 Π_n において、客 n の全遅れを確率的に最小化する。□

5. 最適政策

本節では、政策空間 Π' において、各到着客の全遅れを確率的に最小化する政策を求める。

まず、以下で定義される Z^n 上の関数族 Γ を導入する。これは、 $(-\infty, \infty)^N$ 上で定義される非減少 Schur-convex 関数がもつ性質に対応する (Marshall and Olkin(1979) 参照)。

定義 1 Γ は次の性質を満足する Z^N 上の関数族である。

$$(P1) \quad f(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_N) = f(n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_i, \dots, n_N),$$

$$(P2) \quad f(n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots, n_N) \geq f(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_N),$$

$$(P3) \quad n_i \geq n_j \text{ なる任意の } n_i, n_j \in Z^N \text{ に対して,}$$

$$f(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_N) \geq f(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_N). \quad \square$$

この関数族 Γ は次の性質を満たす (Hirota et al.(1987))。

補題 2 M_1, M_2, \dots, M_N を、互いに独立で同一のパラメータをもつ Poisson 分布に従う確率変数とする。このとき、もし $f(n_1, n_2, \dots, n_N) \in \Gamma$ ならば、

$$\begin{aligned} g(n_1, n_2, \dots, n_N) &= E[f([n_1 - M_1]^+, [n_2 - M_2]^+, \dots, [n_N - M_N]^+)] \\ &\in \Gamma. \quad \square \end{aligned}$$

以下では、到着時刻の列 $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ が与えられているとする。 $\tilde{\pi} \in \Pi'$ を、各到着客を最短の待ち行列のいずれかに送る政策とする。

補題3 任意の $n, m \in Z$ ($n \geq m$), $x \geq 0$, $(n_1, n_2, \dots, n_N) \in Z^N$ に対して,

$$h_{m,n,x}^-(n_1, n_2, \dots, n_N) = P_{\pi}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N))$$

$$h_{m,n,x}^+(n_1, n_2, \dots, n_N) = P_{\pi}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N))$$

と定義する. ここで, $P_{\pi}(A)$ は政策 π のもとで事象 A が生起する確率を表す. このとき,

$$h_{m,n,x}^-, h_{m,n,x}^+ \in \Gamma.$$

証明 以下の命題を示せば十分である.

a) $h_{n,n,x}^+ \in \Gamma$.

b) $0 \leq m \leq n$ を満たす任意の m, n に対して, $h_{m,n,x}^+ \in \Gamma \Rightarrow h_{m,n,x}^- \in \Gamma$.

c) $0 \leq m \leq n-1$ を満たす任意の m, n に対して $h_{m+1,n,x}^- \in \Gamma \Rightarrow h_{m,n,x}^+ \in \Gamma$.

a) $X_i^+(n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は客 n の割り当て直後の待ち行列 i の長さを表す確率変数であるので, (1) 式より,

$$\begin{aligned} & h_{n,n,x}^+(n_1, n_2, \dots, n_N) \\ &= P_{\pi}(TD_n > x | X^+(n) = (n_1, n_2, \dots, n_N)) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j} \leq x\right) P\left(\sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j} \leq x\right) \cdots P\left(\sum_{j=1}^{n_N} X_{N,j} \leq x\right) \end{aligned}$$

ここで $X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{2,1}, \dots, X_{N,1}, \dots$ は互いに独立で, 同一のパラメータ μ を持つ指数分布に従う. (P1), (P2) は明らか. また (P3) は補題1 より成り立つ. よって $h_{n,n,x}^+ \in \Gamma$.

b) $h_{m,n,x}^-$ において, (P1) は明らかに成り立つ.

$$i_0 = \operatorname{argmin}_i n_i, \quad i_1 = \operatorname{argmin}_{i \neq i_0} n_i$$

と定義すると,

$$\begin{aligned} & h_{m,n,x}^-(n_1, n_2, \dots, n_N) = P_{\pi}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N)) \\ &= P_{\pi}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_N)). \end{aligned}$$

$n_{i_0} < n_{i_1}$ ならば,

$$\begin{aligned}
& h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_N) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 2, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_N)
\end{aligned}$$

$n_{i_0} = n_{i_1}$ ならば,

$$\begin{aligned}
& h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_{i_1}, \dots, n_N) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_{i_1}, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_{i_1} + 1, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_{i_1}, \dots, n_N).
\end{aligned}$$

$i \neq i_0$ ならば

$$\begin{aligned}
& h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_i, \dots, n_N) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_i, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_i + 1, \dots, n_N).
\end{aligned}$$

よって $h_{m,n,x}^-$ は (P2) の性質を満たす. (P3) を示すために, $n_j \leq n_i$ と仮定する.

$i_0 \neq i, j$ のとき

$$\begin{aligned}
& h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_N) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_{i_0}, \dots, n_N).
\end{aligned}$$

$i_0 = j, n_j < n_i$ かつ $n_j < n_{i_1}$ ならば

$$h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_N))$$

$$\begin{aligned}
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 2, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_N).
\end{aligned}$$

$i_0 = j, n_j < n_i$ かつ $n_j = n_{i_1}$ ならば

$$\begin{aligned}
&h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_{i_1}, \dots, n_N) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_j + 1, \dots, n_{i_1} + 1, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_{i_1} + 1, \dots, n_N)) \\
&= h_{m,n,x}^-(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_{i_1}, \dots, n_N).
\end{aligned}$$

$i_0 = j$ かつ $n_i = n_j$ ならば (P1) より (P3) は等号で成立する. よって $h_{m,n,x}^-$ は (P3) を満たし $h_{m,n,x}^- \in \Gamma$ が示された.

c) $h_{m+1,n,x}^- \in \Gamma$ と仮定する.

$$\begin{aligned}
&h_{m,n,x}^+(n_1, n_2, \dots, n_N) = P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N)) \\
&= E[P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^-(m+1) = ([n_1 - M_1]^+, [n_2 - M_2]^+, \\
&\quad \dots, [n_N - M_N]^+))]
\end{aligned}$$

ここで M_1, M_2, \dots, M_N は互いに独立で, 同一のパラメータ $\mu(T_{m+1} - T_m)$ を持つポアソン分布にしたがう確率変数である. よって, 補題2より $h_{m,n,x}^+ \in \Gamma$. \square

補題3と Γ の性質を用いて 次の結果を得る.

補題4 任意の $\pi \in \Pi'$, m, n ($0 \leq m \leq n$), $(n_1, n_2, \dots, n_N) \in Z^N$, $x \geq 0$ に対して,

$$a) P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N))$$

$$\leq P_{\pi}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N))$$

$$b) P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N))$$

$$\leq P_{\pi}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N)).$$

証明 帰納法により示す. 任意の $n \in Z$ に対し, b) は $m = n$ のとき明らかに成り立つ. $m = m_1 (m_1 \leq n)$ のとき, b) が成り立つと仮定する. $X^-(m) = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ のとき, 政策 $\pi \in \Pi'$ のもとで客 m を待ち行列 j に割り当てるならば $i_0 = \operatorname{argmin} n_i$ と置くと, 補題 3 と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
& P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_j, \dots, n_N)) \\
&= P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0} + 1, \dots, n_j, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_j + 1, \dots, n_N)) \\
&\leq P_{\pi}(TD_n > x | X^+(m) = (n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_j + 1, \dots, n_N)) \\
&= P_{\pi}(TD_n > x | X^-(m) = (n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_j, \dots, n_N)),
\end{aligned}$$

すなわち $m = m_1$ のとき a) がなりたつ. さらに

$$\begin{aligned}
& P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^+(m-1) = (n_1, n_2, \dots, n_N)) \\
&= E_{(M_1, \dots, M_N)}[P_{\tilde{\pi}}(TD_n > x | X^-(m) = ([n_1 - M_1]^+, \dots, [n_N - M_N]^+))] \\
&\leq E_{(M_1, \dots, M_N)}[P_{\pi}(TD_n > x | X^-(m) = ([n_1 - M_1]^+, \dots, [n_N - M_N]^+))] \\
&= P_{\pi}(TD_n > x | X^+(m-1) = (n_1, n_2, \dots, n_N)),
\end{aligned}$$

よって $m = m_1 - 1$ のとき b) が成り立つ. \square

補題 3, 4 は任意の到着時刻の列 $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ において成り立つ. したがって, 到着時刻の条件づけをはずすことにより次の定理を得る.

定理 2 全ての到着客を, 到着直前において最短の待ち行列へ送る政策は, 各到着客の全遅れを確率的に最小化する. \square

参考文献

Bharath-Kumar, K. and Kermani, P., "Analysis of a Resequencing Problem in Communication Network," in Proc. IEEE INFOCOM '83 (San Diego, Apr. 1983), pp.303-310,

1983.

Hirota, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T., "Optimal Assignment of Bulk Arrival Customers to Identical Exponential Servers," in Proceedings of the Seminar on Queueing Theory and Its Applications (Kyoto, May 11-13, 1987), pp.185-203, 1987.

Iliadis, I. and Lien, L. Y.-C., "Resequencing Delay for a Queueing System with Two Heterogeneous Servers under a Threshold-Type Scheduling," IEEE Trans. Commun., vol. COM-36, pp.692-702, 1988.

Lin, W. and Kumar, P. R., "Optimal Control of a queueing system with two heterogeneous servers," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-29, pp.693-703, 1984.

Marshall, A. W. and Olkin, I., Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, 1979.

Varma, S., "Optimal Allocation of Customers in a Two Server Queue with Resequencing," in Proc. Computer Networking Symposium (Washington, D.C., Apr. 11-13, 1988), pp.222-227, 1988.

Weber, R. R., "On the Optimal Assignment of Customers to Parallel Servers," J. Appl. Prob., vol.15, pp.406-413, 1978.

Yum, T. S. P. and Ngai, T. Y., "Resequencing of Messages in Communication Networks," IEEE Trans. Commun., vol.COM-34, pp. 143-149, 1986.